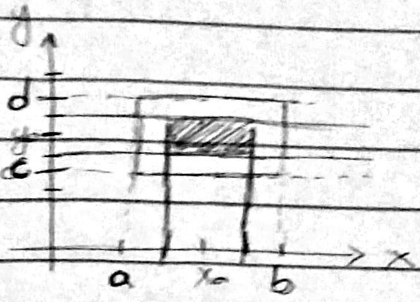
ΘΠΣ (περίπτωση $n=m=1$)

Έστω $F: \underbrace{(a,b)\times(c,d)}_{U} \to \mathbb{R}$

C^1 και $\exists (x_0,y_0)\in U$:

$F(x_0,y_0)=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$



$\Rightarrow \exists\, \delta,\varepsilon>0 \ \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\ [\subset(a,b)]$

$\exists!\ g(x)\in(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)\ [\subset(c,d)]$

$F(x,g(x)) = 0$ ⊛

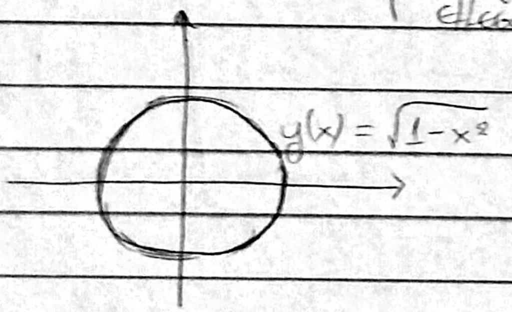
Παραδείγματα:

$F(x,y)=x^2+y^2-1$

Άρα $\underbrace{F(x,y)=0}_{\text{Εξίσωση του κύκλου}} \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2} = y(x)$

σε πεπλεγμένη μορφή (implicit(y) ↓ έμμεση μορφή)

(Εξ. του κύκλου (α² εξ. σταθμού) σε ρητή μορφή (explicit(y)))



⊛ $F(x,y(x))=0$ και η $g:(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\to(y_0-\varepsilon,\ y_0+\delta)$

είναι C^1 με $\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\neq 0$ και

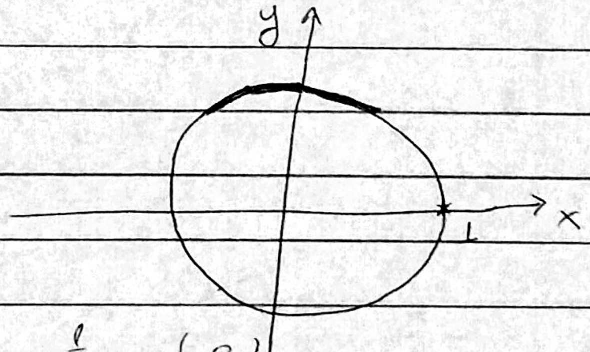
$$g'(x)=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))}$$

Παρατηρήσεις:

Το Θ.Π.Σ. μας λέει ότι αν έχουμε ένα σημείο (x_0,y_0) το οποίο επιλύει την $F(x,y)=0$ και το οποίο $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$
(με $F \in C^1$)
τότε μπορούμε να εξετάσουμε την $F(x,y)=0$ ως προς y
(δηλ. υπάρχει μοναδικό $y=g(x)$ $\forall x$) κοντά στο σημείο (x_0,y_0)
Δες Παράδειγμα
$\Rightarrow \exists\, \delta>0$ $(\delta \leq 1)$ $\forall x\in(-\delta,\delta)$
$\exists!\, g(x) \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ για κάποιο $\epsilon>0$ έτσι ώστε $F(x,g(x))=0$
Πράγματι, εμείς και χωρίς Θ.Π.Σ. ξέρουμε ότι
$g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$ ~~επιλύεται~~ επιλύει την $F(x,g(x))=0$

Προσοχή:

Η $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ είναι η μοναδική συνάρτηση που για $x=x_0=0$
μας βγάζει $y-g(0)=-1$ (που δεν μας ικανοποιεί) και
ικανοποιεί το $g(x_0)=y_0=1$.
Επίσης, υπάρχει μόνο μία συνάρτηση που ικανοποιεί



Ακόμη, έχουμε $g'(x)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x)$

όπου $\sqrt{1-x^2}=g(x)= \;=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))}$ ⊛

και πράγματι $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))=2g(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)) = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))} = -\frac{x}{g(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Παρατήρηση:

Το ⊛ προκύπτει άμεσα από τον κανόνα αλυσίδας αφού $\frac{\partial}{\partial x}(F(x,g(x))) = \nabla F(x,g(x))\cdot(1,g'(x)) =$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)) + g'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δείξτε ότι για αρκετά μικρά $x\in\mathbb{R}$ (δηλ. με $|x|<\delta$ για κάποιο $\delta>0$) υπάρχουν μοναδικές αρκετά μικρές λύσεις $y(x)$ της εξίσωσης: $e^{\sin(x,y)}+x^2-2y=1$ και υπολογίστε την $y'(x)$ ως συνάρτηση των x, $y(x)$

Λύση

$F(x,y) = e^{\sin(x,y)}+x^2-2y-1$ και έχουμε $F(x,y)=0$

Επίσης, το $(x_0,y_0)=(0,0)$ ικανοποιεί

A $F(x_0,y_0)=F(0,0)=0$

και $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin(x\cdot y)}\cos(x\cdot y)\cdot x-2$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$$

B και Γ

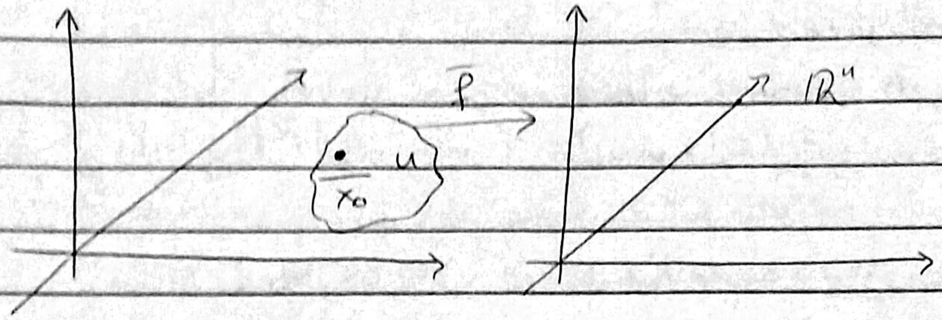
$F\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \overset{\text{ΘΠΣ}}{\Rightarrow} \exists\,\delta>0\ \forall x\in(-\delta,\delta)$

$\exists!\, y(x)\in(-\varepsilon,\varepsilon),\ \varepsilon>0 : F(x,y(x))=0$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (Θ.Α.Σ.)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0 \in U$, $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$, C^1 (ή γενικότερα $C^k, k \geq 1$) με $\nabla \bar{f}(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος

$\Rightarrow \exists\, U_0 \subset U$ και $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό με $\bar{f}(\bar{x}_0) \in V$ και $\bar{x}_0 \in U_0$ έτσι ώστε η $\bar{f}: U_0 \to V$ είναι 1-1 και επί



(*) και η αντίστροφη $\bar{f}^{-1}: V \to U_0$ είναι C^1 (ή γενικά C^k)
και $D\bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{x})) = D(\bar{f}(\bar{x}))^{-1}$

Παρατηρήσεις:

1. Η $\bar{f}$ είναι αντιστρέψιμη τοπικά γύρω από το $\bar{x}_0$ (και όχι ολικά, δηλ. όχι σε όλο το U)
2. Ο τύπος $D\bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{x}))$ προκύπτει άμεσα από τον κανόνα της αλυσίδας

$I\bar{x} = \bar{x} = (\bar{f}^{-1} \circ \bar{f})(\bar{x})$

$\Rightarrow \boxed{DI(\bar{x}) =} I = D(\bar{f}^{-1} \circ \bar{f})(\bar{x}) =$

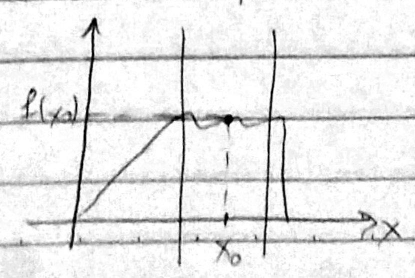
$= D\bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{x}))\, D\bar{f}(\bar{x})$

Tip:
$D(\bar{f} \circ \bar{g})(\bar{x}) = D\bar{f}(g(\bar{x})) \cdot D\bar{g}(\bar{x})$

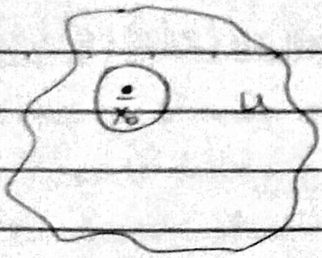
αν γνωρίζαμε (το οποίο μας το δίνει το ΘΑΣ) ότι η $f^{-1} \circ f(U_0) \to U$ είναι C^1 και $D\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{0}$ για $\bar{x} \in U_0$

Ειδικότερα: Έστω $\bar{f} \in C^1(U_0)$ με $\bar{x}_0 \in U_0$ και $\det D\bar{f}(\bar{x}_0) \neq 0$
Τότε για αρκετά μικρό (δηλ. με μικρή ακτίνα) $B(\bar{x}_0, \epsilon)$ έχουμε
$\det D\bar{f}(\bar{x}) \neq 0 \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \epsilon)$

Συνεχής συνάρτηση του $\bar{x}$.



Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0 \in U$
U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$
$f \in C(U)$ με $f(\bar{x}_0) \neq 0$
Τότε $\exists\, \epsilon > 0 : B(\bar{x}_0, \epsilon) \subseteq U$ και $f(\bar{x}) \neq 0$
$\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \epsilon)$.



Αφού για $\tilde{\varepsilon} = \frac{|f(\bar{x}_0)|}{2} > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \subset U$ να έχω

$|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \tilde{\varepsilon}$

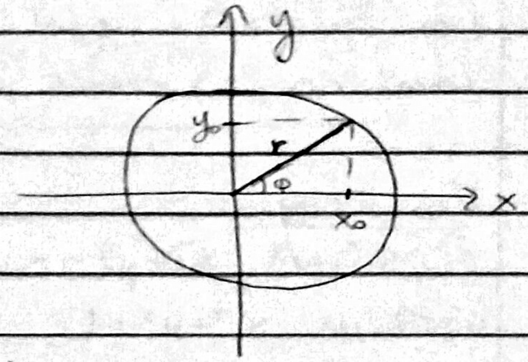
$0 < f(\bar{x}_0) - \tilde{\varepsilon} < f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0) + \tilde{\varepsilon}$

τουλάχιστον για $f(\bar{x}_0) > 0$

Παραδείγματα:

Πολικές συντεταγμένες

$\bar{f} : \underbrace{(0,\infty) \times \mathbb{R}}_{= U \subset \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$



$$\tilde{f}(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{f} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ και $\det Df(r,\phi) = r > 0 \quad \forall (r,\phi) \in U$

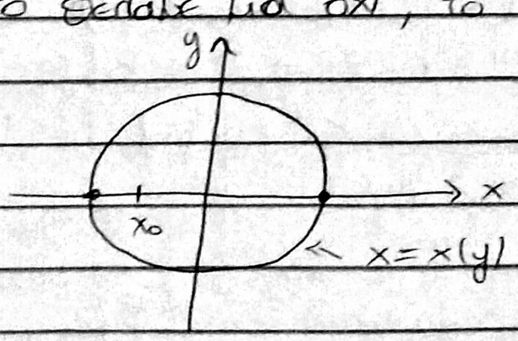
$$D\bar{f}(r,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{bmatrix} \Rightarrow \det D\bar{f}(r,\phi) = r > 0$$

ΘΑΣ $\Rightarrow$ «γύρω από κάθε $(r,\phi) \in U$ (δηλ. τοπικά) η $\bar{f}$ αντιστρέφεται

Προσοχή:

Η $\bar{f}$ δεν αντιστρέφεται (ολικά) σε όλο το $U = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ αφού πχ $\bar{f}(r,\phi) = \bar{f}(r,\phi + 2\pi)$ αυτό σώζεται αν λάβουμε

πχ $\bar{U} = (0,\infty) \times [0, 2\pi)$ εδώ όμως «χαλάει» γιατί μία το 0 το θέλαμε μία όχι, το ανοιχτό του U.



No. Date

Ακρότατα υπό συνθήκη (εκτός ύλης για 6/2/2017)

Ορισμός:

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ και $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$, $r < n$

Λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο υπό τη συνθήκη $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$ στο σημείο $\bar{x}_0 \in M = \{\bar{x} \in U : \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}\}$ αν η $f|_M$ έχει ακρότατο στο $\bar{x}_0$.

[οι $g_1(\bar{x}) = 0, \dots, g_r(\bar{x}) = 0$ δηλ. $\bar{x} \in M$ είναι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες αναζητώ τοπικά ακρότατα]

Παράδειγμα:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \cdot y^2$. Βρείτε τα ακρότατα υπό τη συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

Βρείτε τα ακρότατα της $f|_C : C \to \mathbb{R}$ με $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Λύση:

Δηλ. θέλουμε να βρούμε για ποια (ή ποιο) $(x,y) \in C$ η f έχει ακρότατα (μέγιστο, ελάχιστο)

[εδώ η συνθήκη είναι $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$]

Δηλ. η συνθήκη είναι τα x και y να είναι πάνω στον κύκλο

Υπενθύμιση:

Η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής $\Rightarrow$ η $f|_C$ είναι συνεχής και το C είναι συμπαγές ($\Leftarrow C = \partial B((0,0),1)$)

ή αλλιώς $\forall (x,y) \in C$: $\|(x,y)\| = 1 < 2 \Rightarrow C \subset B((0,0),2)$ δηλ. C φραγμένο, δηλ. αν $(x_\nu, y_\nu) \in C \Leftrightarrow x_\nu^2 + y_\nu^2 = 1$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$

Τότε: $x_\nu \to x_0$, $y_\nu \to y_0 \Rightarrow x_\nu^2 \to x_0^2$, $y_\nu^2 \to y_0^2$

$\Rightarrow x_\nu^2 + y_\nu^2 \to x_0^2 + y_0^2 = 1$

Άρα υπάρχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο της $f|_C$

Εξετάζω την $\tilde{f}(x) = f(x, 1 - x^2) = x(1 - x^2)^2$ και βρίσκω σε ποια σημεία $x \in [-1, 1]$ η $\tilde{f}$ έχει ακρότατα

No. Date

Υπάρχει, γενικά, το εξής θεώρημα το οποίο μας ~~δίνει~~ δίνει ένα μέρος των υποψήφιων σημείων όπου η f/η μπορεί να έχει ακρότατα.

Θεώρημα πολλαπλασιαστών Lagrange:

$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $f: U \to \mathbb{R}$, C^1

$\bar{g}: U \to \mathbb{R}^r$, $r < n$ (r συνθήκες)

Αν η f έχει ακρότατο υπό τη συνθήκη $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$ στο σημείο $\bar{x}_0$ και η $D\bar{g}(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ είναι βαθμίδας r τότε $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^T$

$\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{\lambda}^T \cdot D\bar{g}(x_0)$ ⊛

Τα λ_i λέγονται πολλαπλασιαστές Lagrange

Παρατήρηση: Για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα πολλαπλασιαστών Lagrange κάνουμε τα εξής:

① Επιλύουμε ως προς το $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in U \times \mathbb{R}^n$ το σύστημα

$\nabla_{(\bar{x},\bar{\lambda})} F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{0} \Rightarrow F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \bar{g}(\bar{x}) - f(\bar{x})$

Δηλ. βρίσκουμε για ποια $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ ικανοποιούν την ⊛

ΘΕΜΑ 1:

α) $0 \leq \left| \dfrac{x \cdot y \cdot z}{x^2+y^2+z^2} \right| = \dfrac{|x| \cdot |y| \cdot |z|}{\|(x,y,z)\|^2} \leq \|(x,y,z)\| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| \leq \|(x,y,z)\|$

β) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(f(x,y))$ με $h(z) = \dfrac{\cos(z-1)}{z^2}$, $z \neq 0$

$\xrightarrow{\text{Taylor}} \lim\limits_{z\to 0} h(z) = -\dfrac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 2:

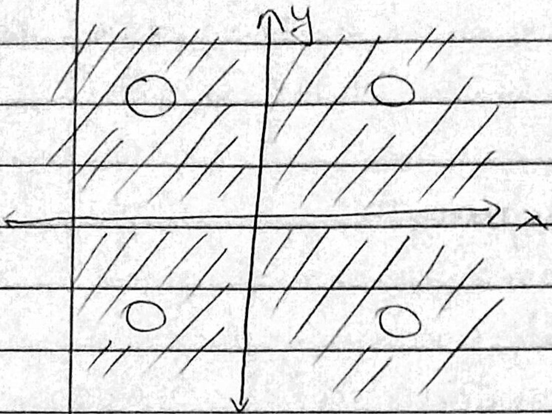
Έστω $(x_0, y_0) \in U \Rightarrow y_0 > 0$ και έστω $\epsilon = y_0 > 0$

Όμως $B((x_0,y_0), \epsilon) \subset U$, δηλ. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

με $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < 0$

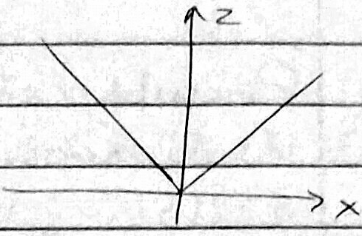
ισχύει $y > 0 \Rightarrow |y - y_0| < \epsilon \Leftrightarrow y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon \Rightarrow y > 0$

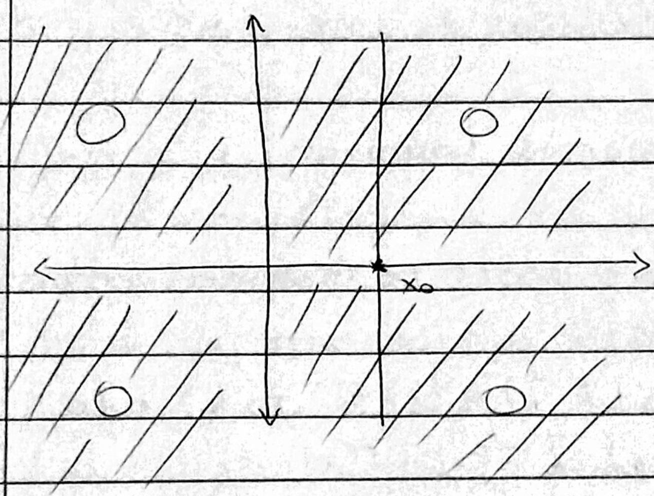
ΘΕΜΑ 3:



$y=0 \quad f(\cdot,0):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x,0)=|x|$





$x=x_0$

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & y\neq 0\\ f(x_0,0)=|x_0|>0, & y=0\end{cases}$$

Στο $(x_0,0)$, $x_0\neq 0$ η f δεν είναι ούτε συνεχής ούτε μερικώς διαφορίσιμη ως προς y (δηλ. $\nexists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ δεν είναι διαφ. στο $(0,0)$ η f είναι συνεχής

$$\forall (x,y): |f(x,y)-f(0,0)| \leq \begin{cases}|x|\\ |y|\end{cases} \leq \|(x,y)\|$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

αλλά δεν είναι μερικώς διαφορίσιμη ούτε για x ούτε για y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}\tilde{f}(0) \text{ της } \tilde{f}(x)=f(x,0)=|x|$$

ΘΕΜΑ 4:

Βλέπε ιδιότητες εδώ το οποίο δίνει ένα μέρος.

No. Date

ΘΕΜΑ 5:

$D I(x) = D(f^{-1} \circ f)(\bar{x}) = D(f^{-1})(\bar{f}(\bar{x}))$

$\xRightarrow{\text{Δρω αντιστρ}} D(f^{-1})(\bar{f}(\bar{x})) = D\bar{f}(\bar{x})^{-1}$

ΘΕΜΑ 8:

$\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$, $\bar{f}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

$\Leftrightarrow \lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \dfrac{f(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{f}(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$

Εδώ το u είναι το y

$\lim_{y \to \bar{0}} \dfrac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x}) - Df(\bar{x})}{\|\bar{y}\|} = \bar{0}$

$\bar{f}(\bar{x}+\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x}) - Df(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{f}(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{f}(\bar{x}) + D\bar{f}(\bar{x})\bar{y}$

$\Rightarrow \bar{a} = \bar{f}(\bar{x})$

$A = Df(\bar{x})$

ΘΕΜΑ 6:

(Με απαγωγή σε άτοπο)

α) Έστω ότι η U συνάρτηση έχει μέγιστο στο $(x_0, y_0) \in U$

$\xRightarrow{u \in C^2} \nabla u(x,y) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \right) = (0,0)$ ⊛

Από την ① έχουμε $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ ή $\dfrac{\partial^2 (u)}{\partial y^2}(x_0,y_0) > 0$

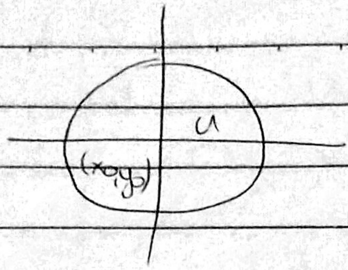
Έστω $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ ⊛⊛. Άρα αν ~~θέσω~~ θέσω $f(x) = u(x_0,y_0)$

όπου (x,y) σημείο στο οποίο υποτίθεται ότι έχουμε μέγιστο

τότε έχω από την ⊛ $f'(x_0) = 0$ και από την ⊛⊛ ότι $f''(x_0) > 0$

$\Rightarrow$ στο x_0 η f έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\} : f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow u(x,y_0) > u(x_0,y_0)$



β) $(x,y) = x^2+y^2$

ΘΕΜΑ 7:

$g(x,y,z) = x-y+z-1=0$

$f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|^2$

Θέλω να βρω για ποιο (x,y,z) η f έχει την τιμή

όταν το $g(x,y,z)=0$